正四面体の中心角

山脇の超数学講座 No.52

正四面体とは，四面体の各面がすべて正三角形よりなっている立体である。
正四面体では，外心（外接球の中心），内心（内接球の中心），
重心（位置ベクトルの平均 注.1），垂心（頂点から対面への垂線の交点）
がすべて一致する。（これは正三角形と同じ性質である）
この点 G を「正四面体の中心」と呼ぶことにする。
そして，図1のように，頂点から対面への垂線のなす角
$\angle AGB$，$\angle AGC$，$\angle AGD$，$\angle BGC$，$\angle CGD$，$\angle DGB$ は，
対称性により，すべて等しい角になる。……①

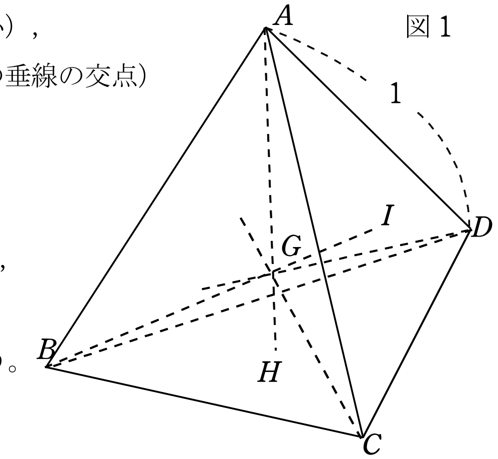

図 1

この角のことを「**正四面体の中心角**」と呼ぶことにしよう。
この角の大きさは，109.5° に近い。

[1]　底面の重心の性質を用いる方法

図 1 で　$\triangle BCD$の重心を H とすると，H は $\triangle BCD$ の外心でもあるから，$AH \perp$ 平面 BCD，

今，正四面体 $ABCD$ の1辺の長さを 1 とすると，$BH=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$AH=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，　$AG=BG=x$ とおくと，　$\left(\frac{\sqrt{6}}{3}-x\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=x^2$

これを解いて，$x=\frac{\sqrt{6}}{4}$ を得る。$GH=\frac{\sqrt{6}}{12}$ となるから，$AG:GH=3:1$ となり，<u>正四面体の中心は，頂点から対面への垂線を 3:1 に内分する点</u>$(*)$ となる。また，1辺の長さ 1 の正四面体の体積 V は，

$V=\frac{1}{3}\times\triangle BCD\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{12}$　となる。 これは覚えておいてよい値である。

さて，本論に戻って，$\angle BGC=\theta$ とおくと，$\triangle BGC$ で余弦定理より，

$$\cos\theta=\frac{2\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2-1^2}{2\times\frac{\sqrt{6}}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{4}}=\frac{2\times\frac{3}{8}-1}{2\times\frac{3}{8}}=-\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=-\frac{1}{3}=-0.333\cdots\cdots=-0.\dot{3}$$ となる。

三角比の表を参照すると，$\cos 70^\circ=0.3420$，$\cos 71^\circ=0.3256$　であり，$\frac{0.3420+0.3256}{2}=0.3338$

であるから，$0.333\cdots\cdots \fallingdotseq \cos 70.5^\circ$，　$\cos\theta \fallingdotseq \cos(180^\circ-70.5^\circ)=\cos 109.5^\circ$　となり，

正四面体の中心角 θ は，109.5° に極めて近い。見事なまでに近いと言えるだろう。

底面の正三角形 $\triangle BCD$ の中心角 $\angle BHC=120^\circ$ より 10.5° 小さいが，$120\times\frac{7}{80}=10.5$ だから，

$120\times\frac{73}{80}=109.5$　となる。弧度法では，$109.5^\circ=\frac{73}{120}\pi$　となる。弧度法でも近い値が出せるのだ。

[2]　正四面体の中心の性質をダイレクトに用いる方法

[1] の途中で出てきた性質 $(*)$ を用いれば，図1 で $BG:GI=3:1$，$GI=GH$　だから，

$BG:GH=3:1$，$\triangle BGH$ は　$\angle BHG=90^\circ$ の直角三角形だから，$\cos\angle BGH=\frac{1}{3}$，

また，$\angle AGB=180^\circ-\angle BGH$ より，　$\cos\angle AGB=-\cos\angle BGH=-\frac{1}{3}$

そして，① より，$\angle AGB=\theta$，　したがって，$\cos\theta=-\frac{1}{3}$　となる。

[3]　位置ベクトルを用いる方法

正四面体の頂点 A を位置ベクトルの原点とし，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$，$D(\vec{d})$　とする。

正四面体 $ABCD$ の1辺の長さを 1 とすれば，$|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$，また内積については，

$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ=1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，同様に，$\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$ ……　②

A から平面 BCD に下ろした垂線の足 H は $\triangle BCD$の重心でもあるから，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$，

ここで，線分 AH を 3:1 に内分する点を G とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{3}{4}\times\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$ $(**)$

さらに，$\triangle ACD$の重心を I として，線分 BI を 3:1 に内分する点 G' の位置ベクトルは，

$\overrightarrow{\mathrm{AG'}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AI}}}{3+1}=\frac{1}{4}\left(\vec{b}+3\times\frac{\vec{c}+\vec{d}}{3}\right)=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$　となり，点 G と点 G' は一致する。

他の面でも同じことがいえ，頂点から対面への 4 垂線は1点 G で交わり，それぞれを 3:1 に内分する。

$(**)$ の分子に$A(\vec{0})$ を加えれば，$\frac{\vec{0}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$となり，これが「位置ベクトルの平均 **注.1**」である。

ベクトルを利用して，$\cos\angle BGC=\cos\theta$ を求めてみよう。θ は $\overrightarrow{\mathrm{GB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{GC}}$ のなす角である。

$\overrightarrow{\mathrm{GB}}=\vec{b}-\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}=\frac{3\vec{b}-\vec{c}-\vec{d}}{4}$，$\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\frac{3\vec{c}-\vec{d}-\vec{b}}{4}$　と表されるから，　②を適用して，

$|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|=\frac{1}{4}\sqrt{9|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2-6\vec{b}\cdot\vec{c}-6\vec{b}\cdot\vec{d}+2\vec{c}\cdot\vec{d}}=\frac{1}{4}\sqrt{9+1+1-3-3+1}=\frac{\sqrt{6}}{4}=|\overrightarrow{\mathrm{GC}}|$，また，

$\overrightarrow{\mathrm{GB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\frac{1}{16}(3\vec{b}-\vec{c}-\vec{d})\cdot(3\vec{c}-\vec{d}-\vec{b})=\frac{1}{16}(10\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{b}\cdot\vec{d}-2\vec{c}\cdot\vec{d}-3|\vec{b}|^2-3|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2)=-\frac{1}{8}$，よって，

$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{GB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{GB}}||\overrightarrow{\mathrm{GC}}|}=\frac{-\frac{1}{8}}{\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2}=-\frac{1}{3}$　とベクトルの力のみで，正四面体の中心角の余弦が求められた。

正四面体は，メタン CH_4 の分子構造になっていて，中心に炭素 C が，頂点に水素 H が位置し，CとH の結合角は109.5°である。 109.5°は**マラルディの角度**ともいわれて，A4やB4 の用紙の対角線のなす角のうち鈍角の角度でもある。これは，A4・B4 用紙の縦横比が $1:\sqrt{2}$ であるところからきている。